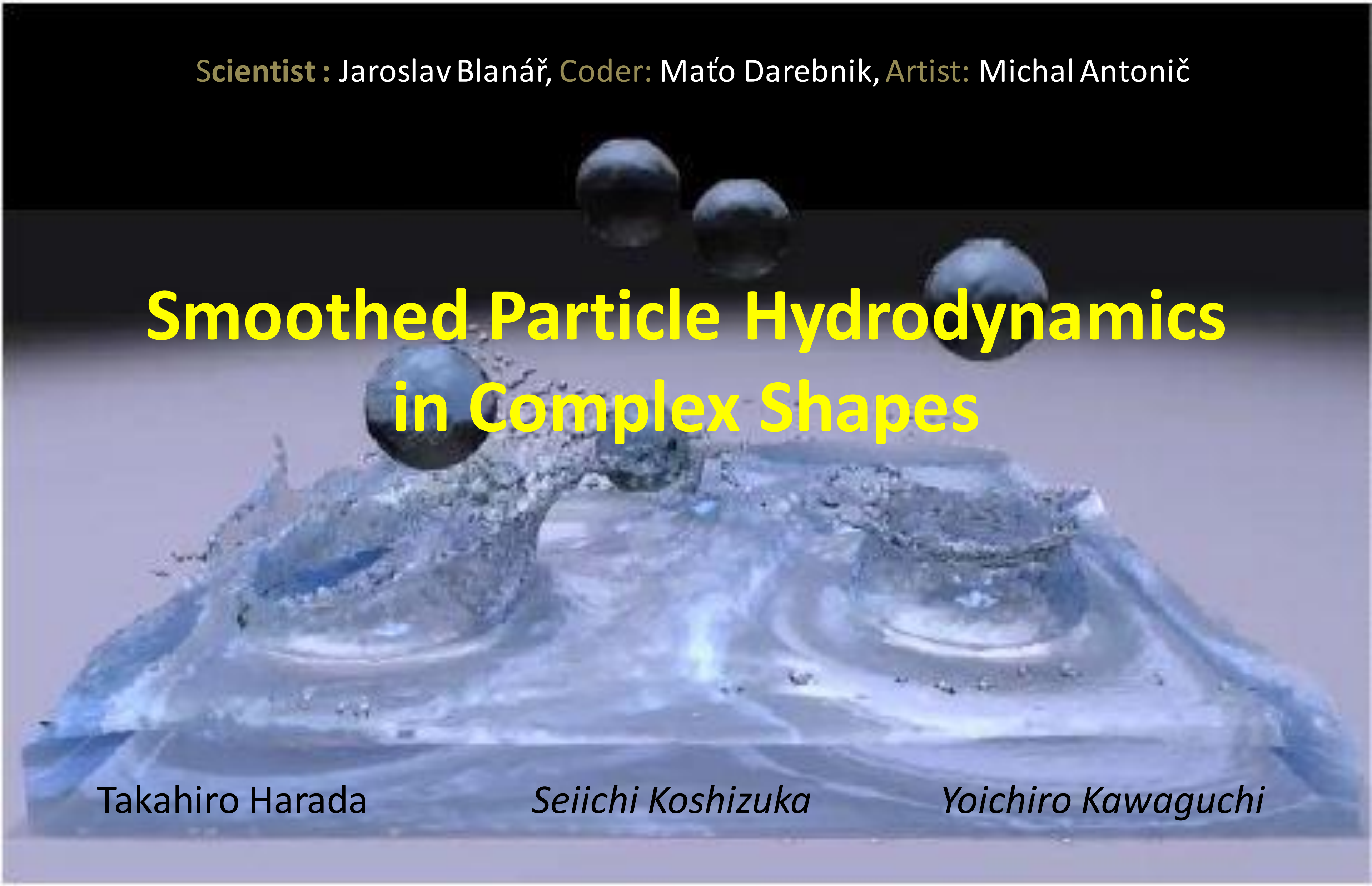


Scientist : Jaroslav Blanář, Coder: Maťo Darebnik, Artist: Michal Antonič

Smoothed Particle Hydrodynamics in Complex Shapes

Takahiro Harada *Seiichi Koshizuka* *Yoiichiro Kawaguchi*

Hlavné črty

- Physically Based Animation – Fyzikálny základ animácie
- Particle Method – Časticová metóda
- SPH – Smoothed Particle Hydrodynamics

Particle Method

- Všeobecne časticové metódy používajú k výpočtu stenovej hranice časticovú reprezentáciu.
- Metódy na simuláciu kvapalín
  - Moving Particle Semi-implicit (MPS)
  - Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)
- Vhodné pre real-time simulácie.

Particle Method - problémy

- Použitím častíc na reprezentáciu hranice vzniká problém, že geometria hranice nie je reprezentovaná správne => ťažká simulácia pohybu kvapaliny v zložitých tvaroch.
- Pomer stenových častíc k celkovému je vysoký.
- Zložité vyrobiť hladký alebo voľný povrch.

Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH)

- Vynájdená v roku 1977 Monaghan a Lucy v astrofyzike pre riešenia problémov v otvorenom 3D priestore.
- Meshfree Lagrangian časticová metóda pre modelovanie tokov tekutín.
- Počíta stlačiteľné prúdenie kvapaliny, znižovaním stlačiteľnosti môžeme počítať aj kvázi nestlačiteľné prúdenie.
- Výpočtové náklady SPH sú nižšie ako pri MPS.

SPH –základné rovnice pre nestlačiteľné kvapaliny

ρ – hustota
U – rýchlosť
P – tlak
ν – viskozita kvapaliny
g – gravitačné zrýchlenie

mj – hmotnosť častice j
ρj – hustota častice j
xj – pozícia častice j
W – váha funkcie, váhová

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{U} + \mathbf{g}$$

Navier Stokes bez advekčnej sily

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

Hodnota skalárnej veličiny pri polohe častice x

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ &= \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

Hustota kvapaliny

$$p = p_0 + k(\rho - \rho_0)$$

Tlak kvapaliny

SPH –základné rovnice pre nestlačiteľné kvapaliny

Výpočet symetrickej tlakovej a viskóznej sily, ktoré zachovávajú hybnú silu.
$r_{ij} = r_j - r_i$, sú pozície častíc i a j

$$\mathbf{F}_i^{press} = -\sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W_{press}(\mathbf{r}_{ij})$$

$$\mathbf{F}_i^{vis} = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla W_{vis}(\mathbf{r}_{ij})$$

Váhové funkcie pre tlak, viskozitu a iné navrhnuté Müllerom.

$$\nabla W_{press}(\mathbf{r}) = \frac{45}{\pi d^6}(d - |\mathbf{r}|)^3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\nabla W_{vis}(\mathbf{r}) = \frac{45}{\pi d^6}(d - |\mathbf{r}|)$$

$$W(\mathbf{r}) = \frac{315}{64\pi d^9}(d^2 - |\mathbf{r}|^2)^3.$$

Matthias Müller

- Vo všeobecnosti časticové metódy vypočítavajú stenovú hranicu kvapaliny zo stenových častíc.
- Vyvinul metódu, v ktorej kvapalné častice interagujú s lagrangeovským pletivom. Metóda počíta časticovú interakciu s pletivom, tak že vytvára dočasné častice na povrchu pletiva v každom časovom kroku a hybnosť sa vymení medzi nimi.

Wall weight function

Keďže SPH používa na výpočet stenovej hranice stenové častice, musíme vyvinúť nový výpočtový model pre hustotu, viskozitu a tlak kvapaliny, ktorý nepoužíva stenové častice na výpočet hranice.

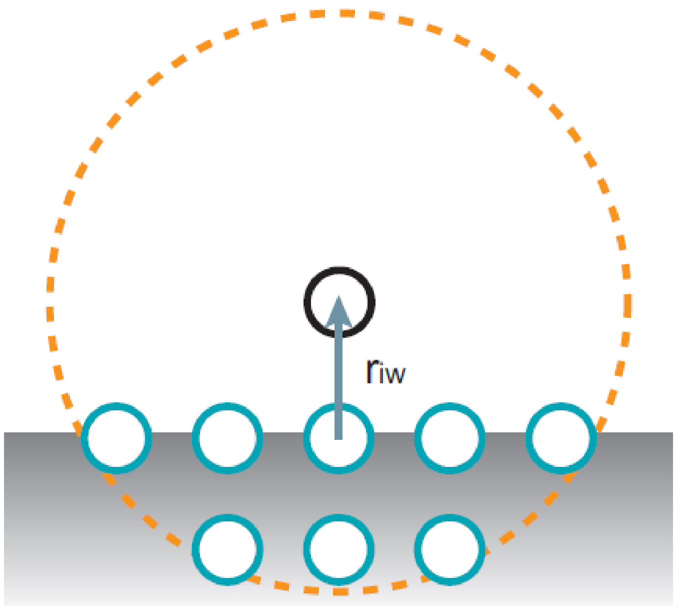
Namiesto stenových častíc používame vzdialenostnú funkciu k výpočtu hranice z polygónového modelu.

Hustota

Hustotu počítame ako príspevok kvapalných časti a stenových častíc.

$$\rho_i(\mathbf{r}_i) = \sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij})$$
$$= \sum_{j \in fluid} m_j W(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_{j \in wall} m_j W(\mathbf{r}_{ij})$$

$$\rho_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \in fluid} m_j W(\mathbf{r}_{ij}) + Z_{wall}^{rho}(|\mathbf{r}_{iw}|).$$



Príspevok stenových častíc je vypočítaný ako funkcia vzdialenosti k stenovej hranici |riw|, kde $Z_{wall}^{rho}(|\mathbf{r}_{iw}|)$ je wall weight function of density

Viskozita

Viskózna sila $\mathbf{F}_i^{vis}$ je tiež rozložená do príspevku kvapalných časti a stenových častíc.

$$\mathbf{F}_i^{vis} = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla W_{vis}(\mathbf{r}_{ij})$$
$$= \mathbf{F}_{i,fluid}^{vis} + \mathbf{F}_{i,wall}^{vis}.$$

Viskózna sila steny je nula a viskózna sila od steny je počítaná

$$\mathbf{F}_{i,wall}^{vis} = -\mu \mathbf{v}_i \sum_{j \in wall} m_j \frac{1}{\rho_j} \nabla W_{vis}(\mathbf{r}_{ij}).$$

Viskozita

Používame nestlačiteľnú kvapalinu aj keď rovnica zachovania hmoty nie je riešená v SPH, môžeme počítať takmer nestlačiteľnú kvapalinu => že hustota v kvapaline je približne rovnaká, taktiež hustota stenových častíc. Za predpokladu, že hustota stenových častíc je konštantná potom aj $m_j \frac{1}{\rho_j}$ je konštanta.

Príspevok stenových častíc vo viskóznom terme sa vypočíta s pomocou vzdialenosti |riw| od hranice z častice i.

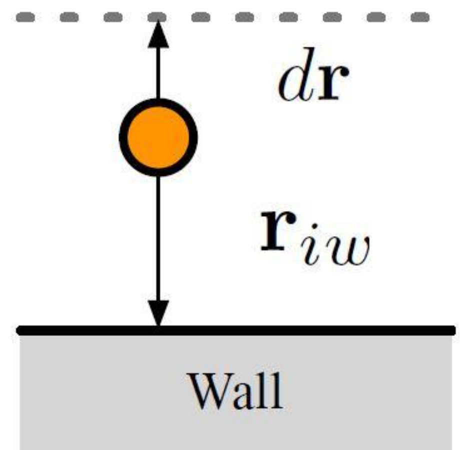
$$\mathbf{F}_i^{vis} = -\mu \mathbf{v}_i Z_{wall}^{vis}(|\mathbf{r}_{iw}|)$$

wall weight function of viscosity term $Z_{wall}^{vis}(|\mathbf{r}_{iw}|)$

Tlak

Keď je nestlačiteľná kvapalina riešená časticovou metódou, tlakový term zabezpečuje, že hustota častíc v kvapaline je všade konštantná.

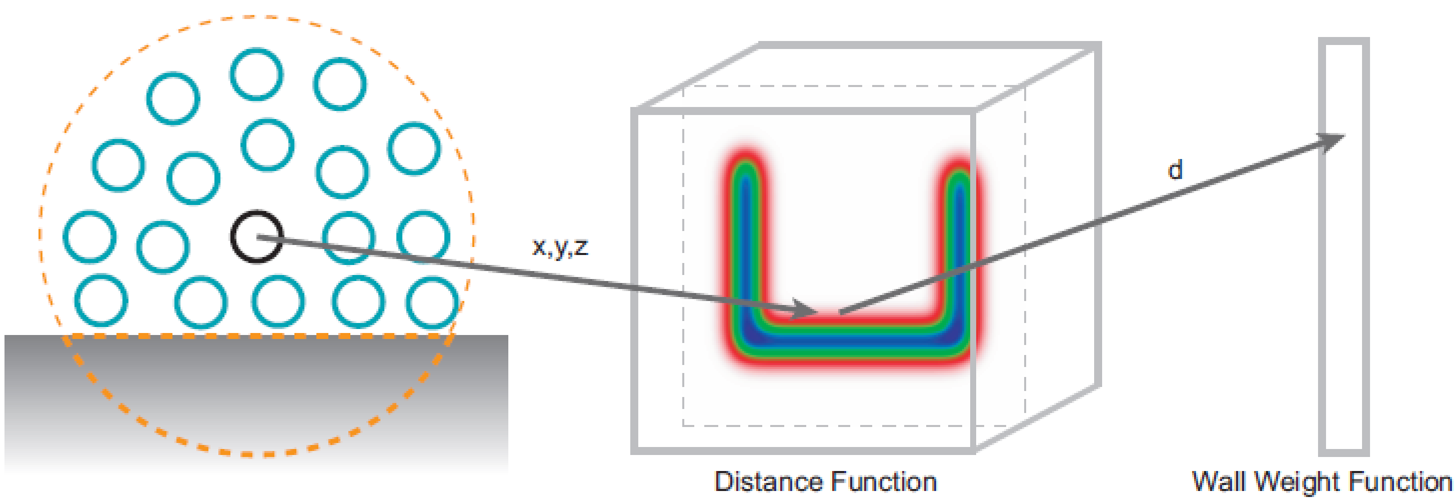
Keď častica i sa nachádza v pozícii, v ktorej vzdialenosť k stenovej hranici je |riw| (|riw| je menšie ako d). Tlaková sila tlačí časticu i o vzdialenosť (d - |riw|) v smere n(ri), kde n(ri) je normálový vektor z najbližšieho bodu stenovej hranice ri.



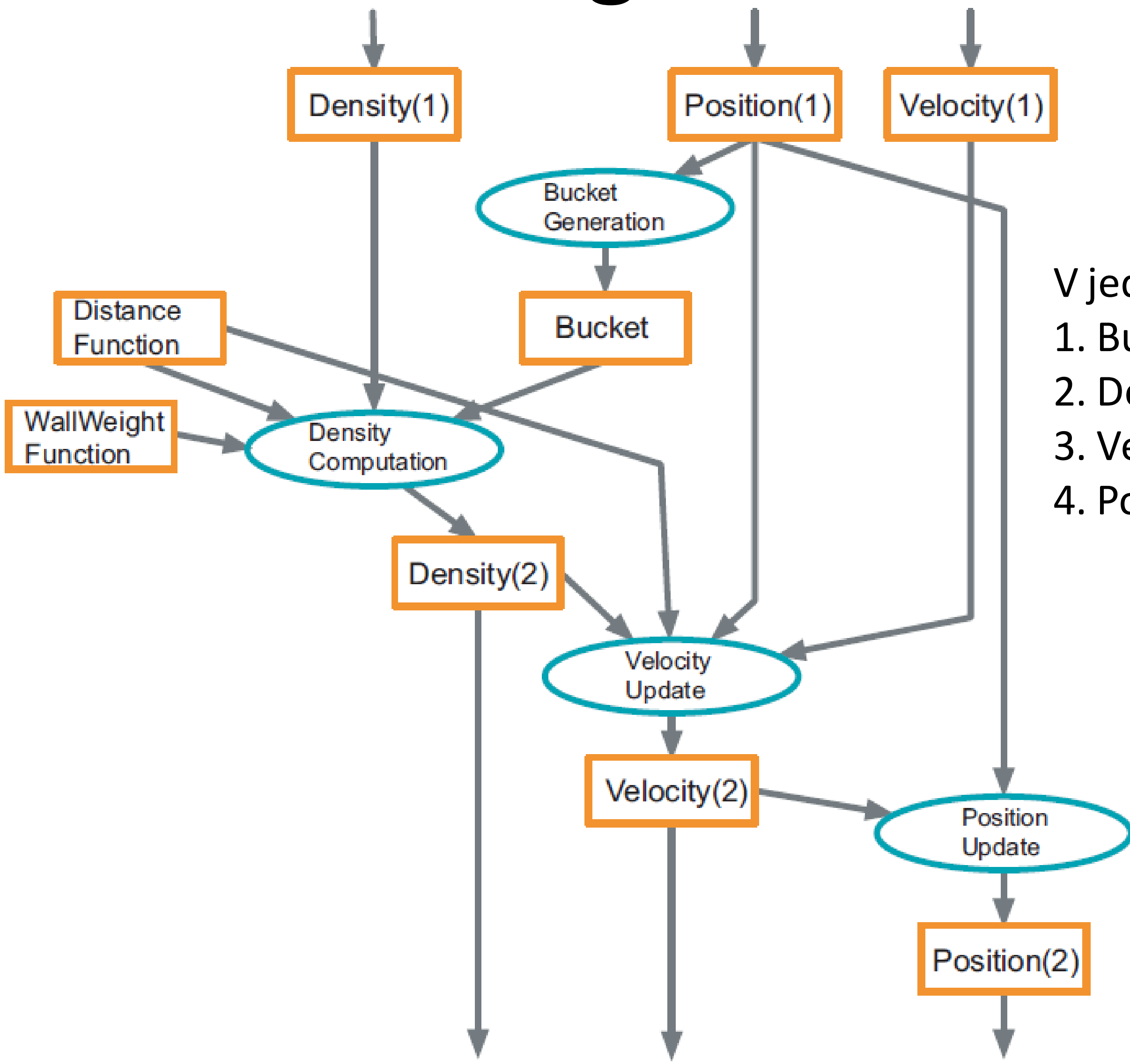
$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_i^{press} &= m_i \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{\Delta t^2} \\
&= -m_i \frac{(d - |\mathbf{r}_{iw}|)\mathbf{n}(\mathbf{r}_i)}{\Delta t^2}
\end{aligned}
$$

Vypočítanie WWF

WWF závisí od vzdialenosti k stenovej hranici |riw|, aby sme vypočítali vzdialenosť k hranici musíme vypočítať vzdialenosť ku všetkým polygónom zahŕňajúcich hranicu a vybrať minimálnu hodnotu. Gradient vzdialenostnej funkcie je normálový vektor k najbližšiemu bodu na hranici.



Algoritmus SPH



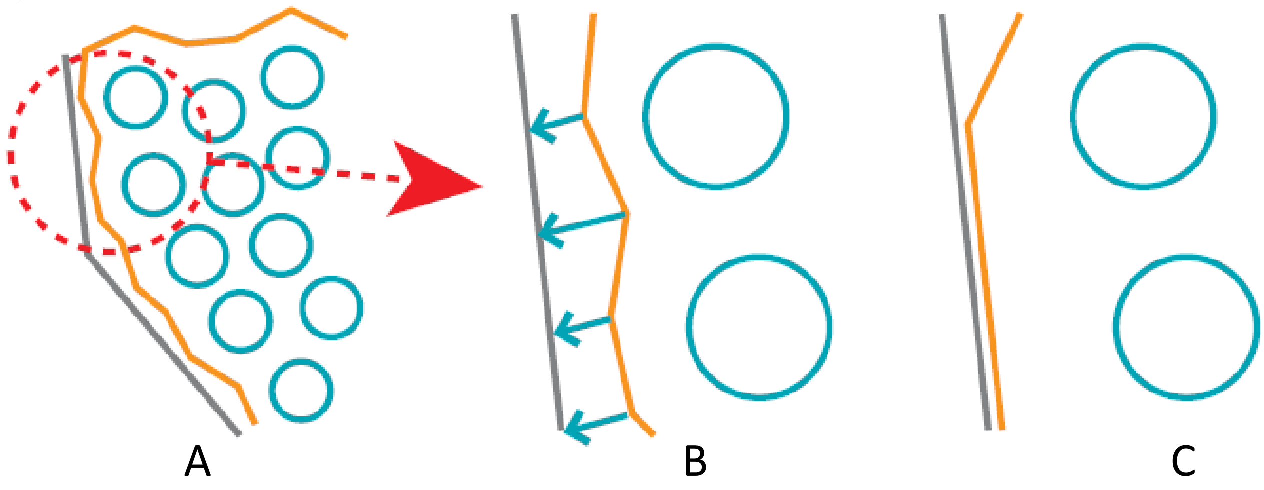
V jednom časovom kroku vykoná :

1. Bucket Generation
2. Density Computation
3. Velocity Update
4. Position Update

Surface Fitting – Povrchová montáž

- Vyňatý povrch nepasuje k stenovej hranici - (A)
- Aby sme získali tesný kontakt s hranicou musíme opraviť pozíciu vrcholu jeho posunutím do najbližšieho bodu na stene (B).
- Vrchol v pozícii x je presunutý do opravenej pozície x’, použitím vzdialenostnej funkcie d(x) a gradientu vektora n(x).

$x' = x - d(x)n(x)$



Výsledky 1.

- Zostava : Pentium 4 3.6GHz CPU and 3.0GB RAM program v C++.
- Metóda, ktorá namiesto stenových častíc používa vzdialenostnú funkciu a stenovú váhovú funkciu.
- Použili pred vypočítané hodnoty vzdialenostnej funkcie, gradiet vektora a stenová váhová funkcia WWF preto výpočet nákladov navrhnutej metódy je nízky.
- Kontaktný povrch kvapaliny pasuje k stene modelu.

Ukážka 1.

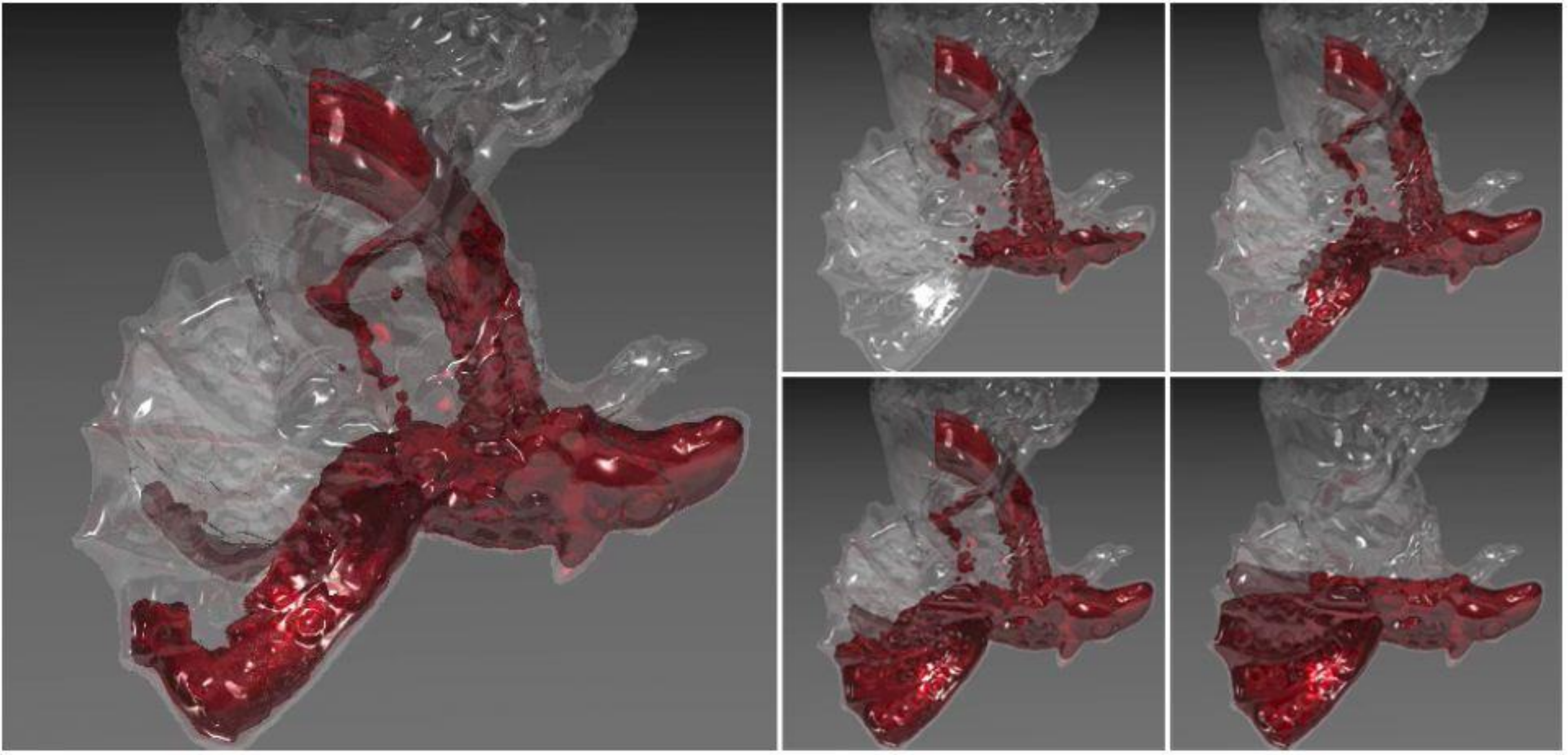


Figure 3: A computation result of free surface flow. A gargoyle polygon model was used as a wall boundary.

Výsledky 2.

- Keď má model jemnú štruktúru menšiu než priemer častíc, kvapalné častice sa nemôžu dostať do týchto častí => obmedzenie časticových metód.

Model	Fluid	Time
Gargoyle	20,000	309.4
Dragon	20,000	281.2
Buddha	20,000	296.8

Celkový počet častíc, jeden časový krok skončí v rámci sekundy. Čas je udaný v milisekundách.

Model	Wall	Total	Ratio
Gargoyle	26,688	46,688	0.572
Dragon	18,582	38,582	0.482
Buddha	12,084	32,084	0.377

Nástenné častice sú generované v modeloch používajúce povrchové voxelizačné metódy.

Ukážka 2.

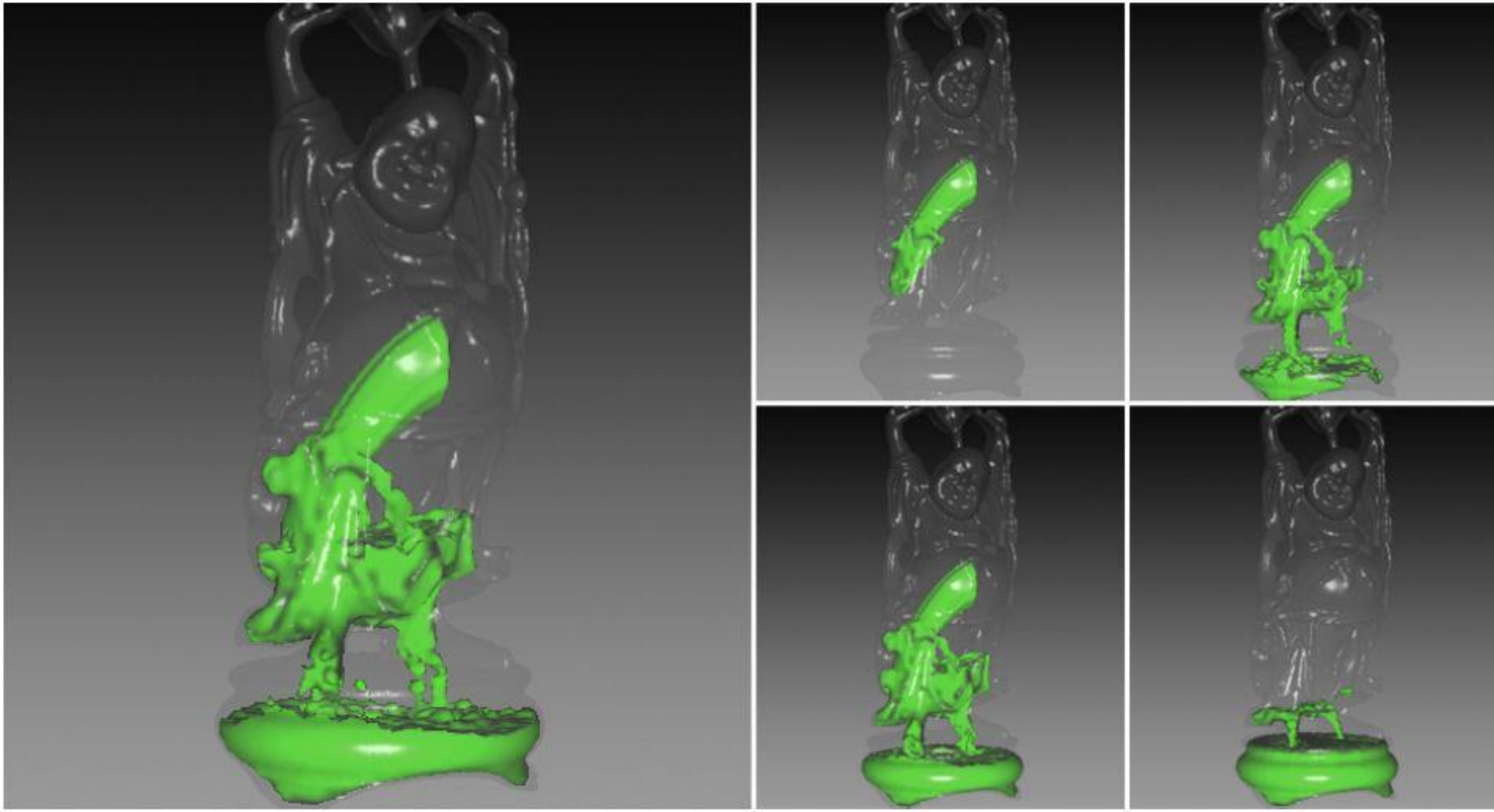


Figure 6: A computation result of free surface flow. A buddha polygon model was used as a wall boundary.

Ukážka 3.

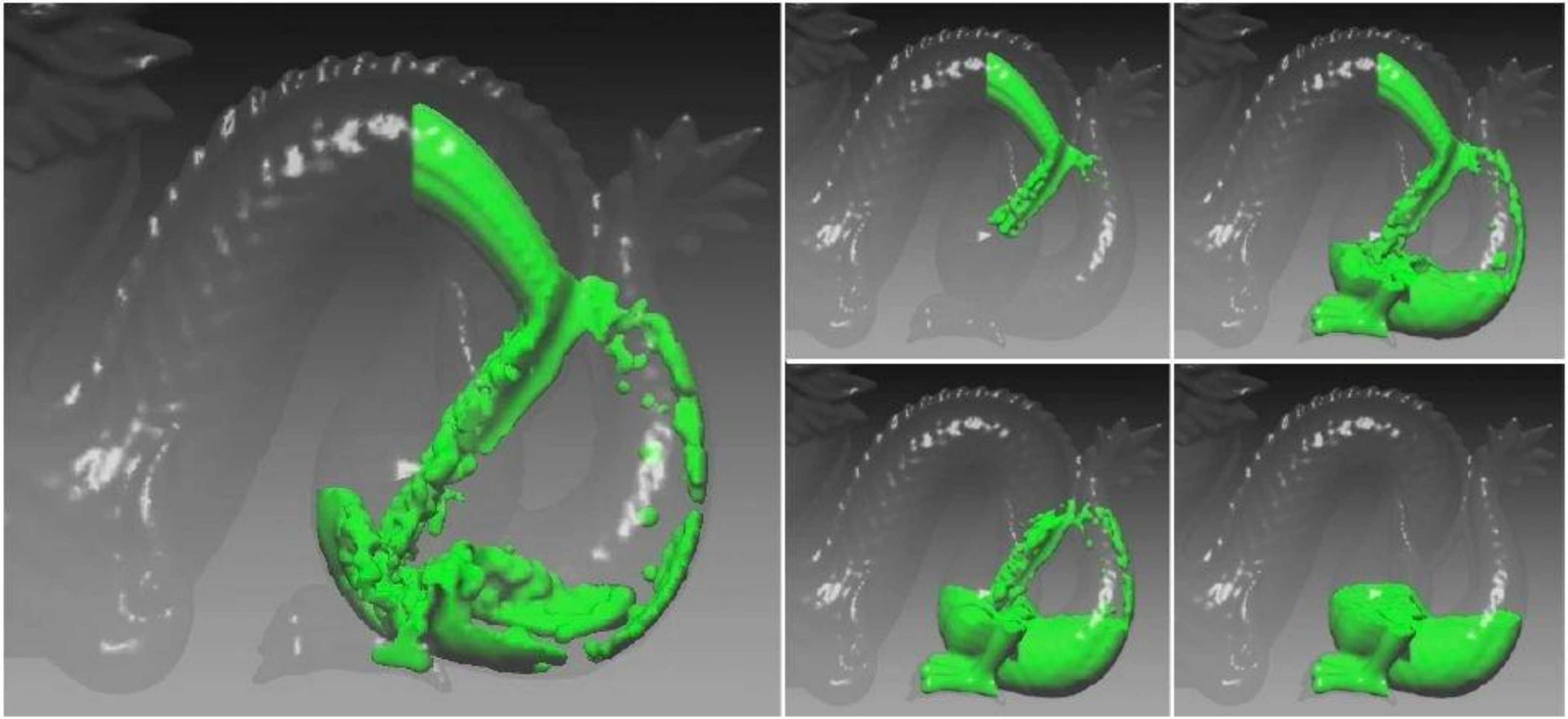


Figure 4: A computation result of free surface flow. A dragon polygon model was used as a wall boundary.

Záver

- Navrhli metódu, ktorá namiesto stenových častíc používa stenovú váhovú funkciu a vzdialenostnú funkciu.
- Metóda umožnila simulovať tekutiny v zložitých tvaroch.
- Zmenšiť celkový počet častíc.
- Metóda Surface Fitting, ktorá vytvára kontaktný povrch s stenovou hranicou a prispôsobuje sa ku geometrii.
- V budúcnosti rozšíria metódu o vzájomné pôsobenie medzi tekutinami a tuhými a elastickými telesami. Preskúmať metódu, ktorá by dokázala vytvoriť hladký povrch z častíc.