Stabilné kvapaliny
Jos Stam

Stanislav Mendel
FMFI UK

Motivácia

- Kvapaliny (objekty podobne kvapaline) sú všade – oblaky, dym, hmla, rieky
- simulácia je dôležitý a náročný problém v mnohých aplikáciách
- dopyt v rôznych oblastiach(špeciálne efekty,kresliace programy, textúry - erózia)
- využívajú sa v rôznych aj vedeckých a inžinierskych disciplínach

História

- v minulosti väčší dôraz na vizuálnu stránku pred fyzikálnou
- Skoršie modely zložené z graphic primitives
- Zlepšenie s predstavením náhodného vírenia- periodické v čase a priestore,uchováva si tvar
- nevýhoda: chýbajúca dynamická odpoveď na vonkajšie sily (pohyb myši, ...)

História

- Následne využitie Navier-Stokes rovníc v 2 dimenziách
- Foster a Metaxas – prvé použitie v 3D, odvtedy sa techniky, ktoré využívali, rapídne zlepšili, jednoduchá metóda a nestabilná

Navier-Stokes algoritmus

- Jednoduchý na implementáciu
- Vychádza z Foster a Metaxas
- Real-time interakcia
- Použitie Langarianovej a implicitnej metódy
- Metóda zaradená do semi-Langarianovej schémy (1950+) - zriedkavo využívaná v inžinierstve, náročná na počítanie

Navier-Stokes algoritmus

- Nevýhoda schémy: kvapalina inklinuje k rýchlejšiemu zmenšeniu objemu ako reálna kvapalina

Navier-Stokes v poč. grafike

- Tento probĺém je menej výrazný aj vďaka externým silám
- Metóda dokáže vytvoriť víriacu vodu, napriek zložitosti
- Metóda úspešne integrovaná do real-time prostredia

Fyzika kvapaliny

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + \kappa \nabla^2 \rho + S$$

Navier-Stokes rovnica
- pre rýchlosť
- pre hustotu v určitej rýchlosti

Matematické pozadie

- stav kvapaliny(v istom čase):
  - určený funkciou rýchlosti: každému bodu v priestore priradí vektor rýchlosti

    (vzduch v miestnosti rýchlejšie stúpa)

  – rýchlosť je zaujímavá pre vizualizáciu až vtedy, keď začne hýbať objektami(piesok, listy)

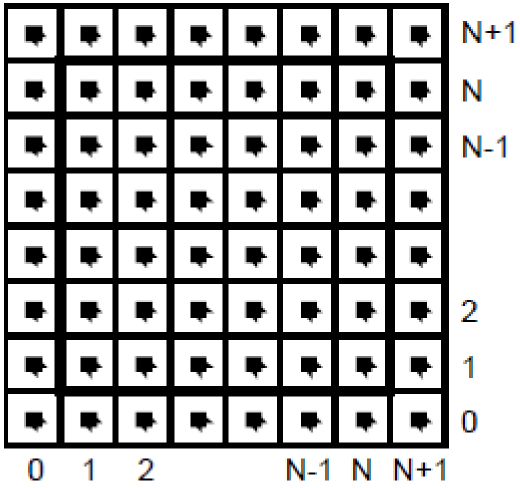
  – pohyb = skonvertovanie rýchlosti do sily
- V prípade dymu sa používa funkcia hustoty – každému bodu v priestore priradi množstvo častíc (hodnoty 0-1)

Rovnica hustoty vs. rýchlosti

- Rovnica hustoty:
  - Jednoduchšia
  - Lineárna
- Rovnica rýchlosti
  - Zložitejšia
  - nelineárna

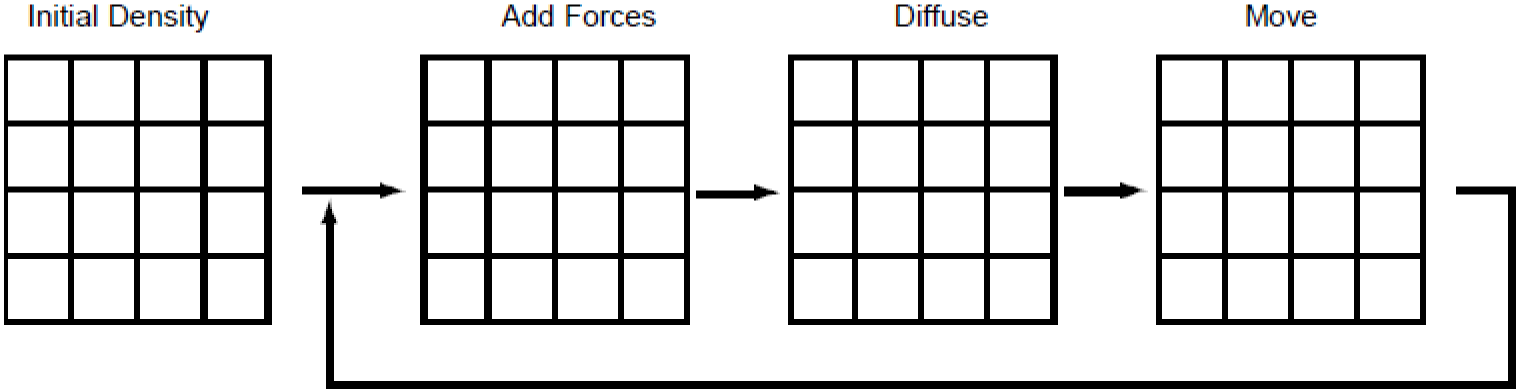
Rovnica hustoty

- Reprezentácia priestoru
  - Konečné ohraničenie
  - 2 mriežky s init hodnotami (rýchlosť, hustota)
  - Preferované 1 rozmerné polia



Riešenie rovnice hustoty

- Riešenie hustoty počas fixovanej rýchlosti
- Začiatok z inicializačného stavu(hustota, rýchlosť)
- Updatovanie stavu podľa udalostí v priestore



Riešenie rovnice hustoty

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + \kappa \nabla^2 \rho + S$$

závislosť od funkcie rýchlosti

hustota sa môže rozpínať

hustota sa zväčšuje vplyvom vonkajších síl

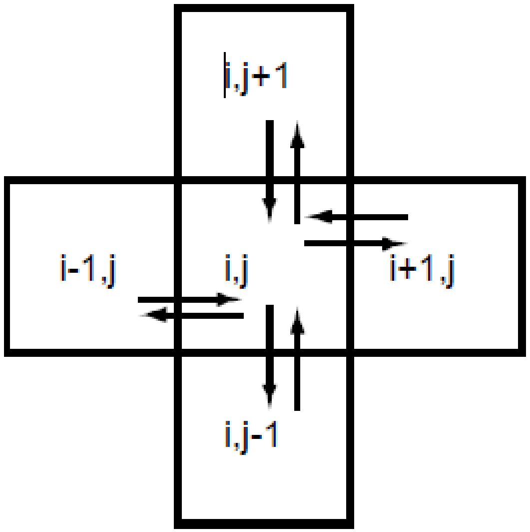
- tieto 3 zložky sa riešia reverzne(sila, difúzia, rýchlosť)

Riešenie rovnice hustoty-sila

- jednoduché na implementáciu
- každému políčku prirátaj silu

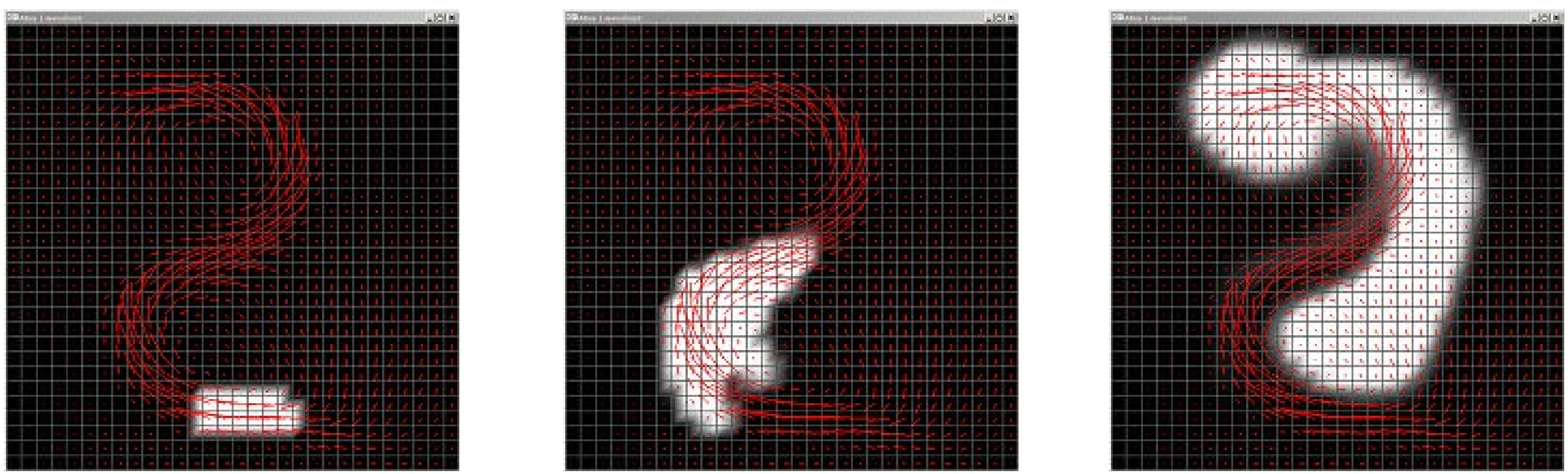
Riešenie rovnice hustoty-difúzia

- v prípade, že premenná ***diff* > *0*,** kvapalina sa rozšíri po celej mriežke
- hustota vymieňa so 4mi priamymi susedmi bunky bunky
- ubúda premiestňovaním do susedných buniek, a pribúda prijímaním hustoty z týchto buniek



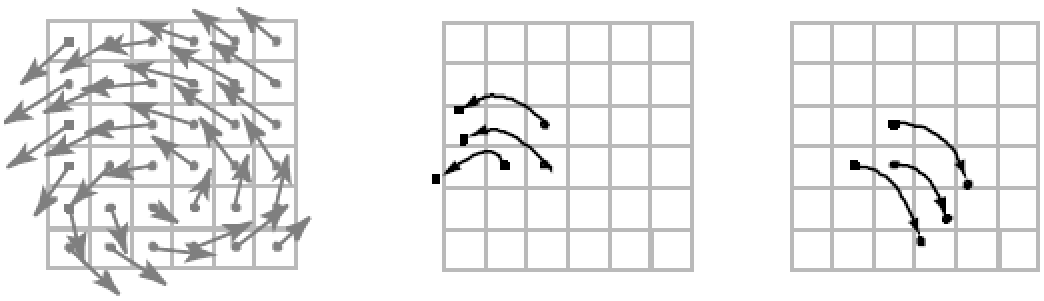
Riešenie rovnice hustoty-difúzia

- možné riešenie – vypočítaj zmeny v každej bunke a sčítaj s existujúcimi hodnotami
- ***problém* – hustota osciluje**
- ***riešenie* –** nájdi hustoty, ktoré keď naspäť difúzneme, nájdeme štartovacie hustoty



Riešenie rovnice hustoty-rýchlosť

- hlavná idea- ak hustota je modelovaná ako množina častíc, je tak sa da ľahko riešiť
- nájdeme častice, ktoré počas jedného časového kroku skončia presne v strede bunky (príklad (c)).



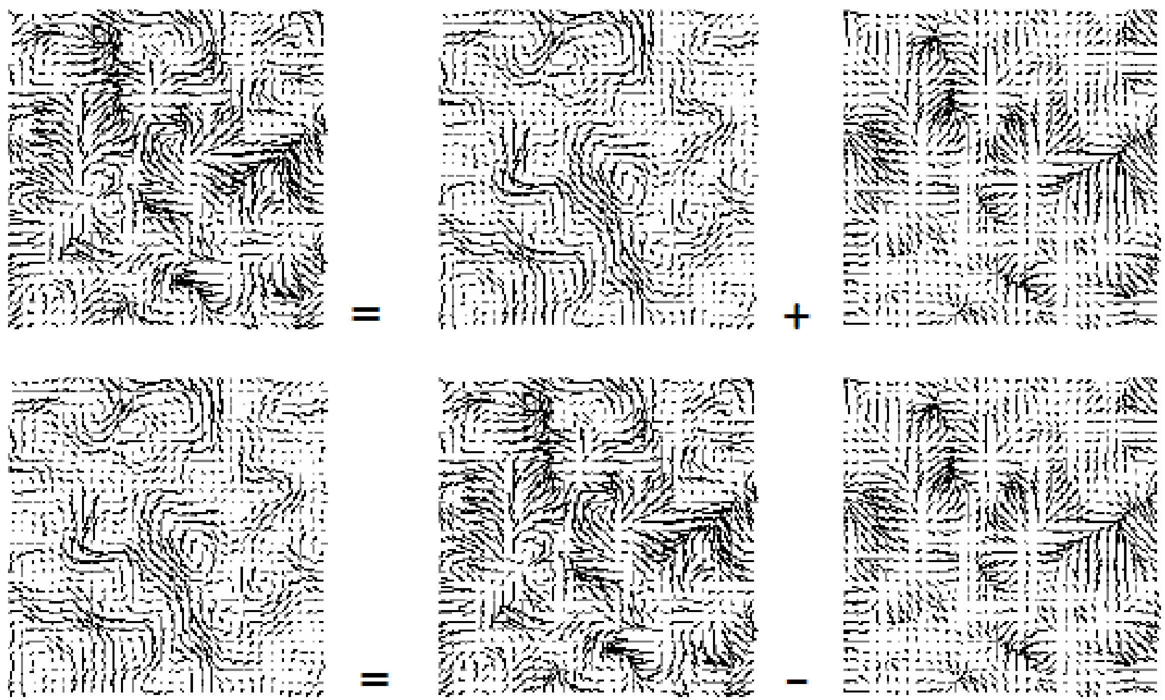
(a) (b) (c)

Riešenie rovnice rýchlosti

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

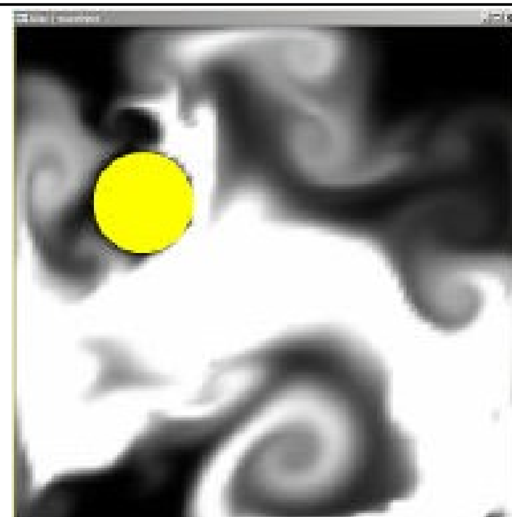
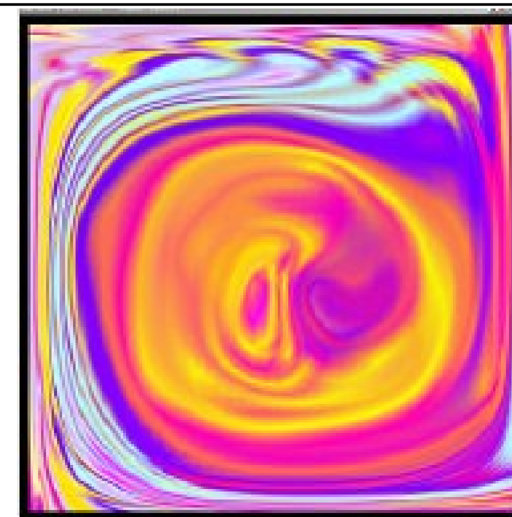
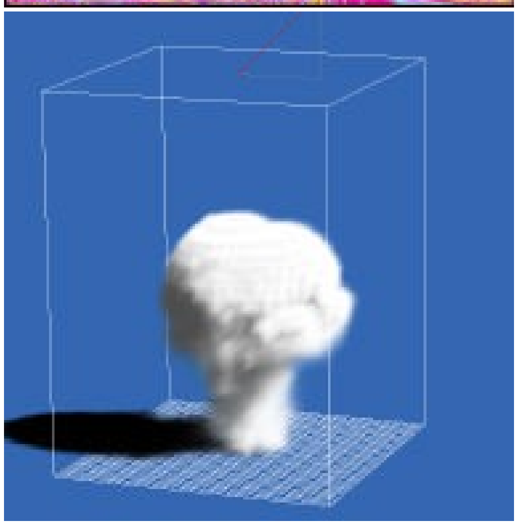
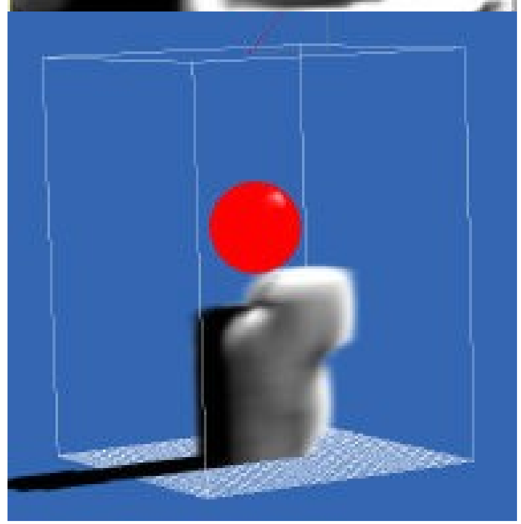
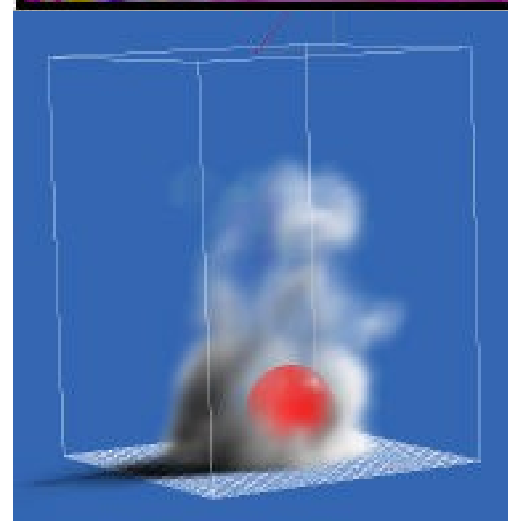
- riešenie založené na podobnom princípe ako riešenie rovnice hustoty
- súčet síl, difúzie, self-advekcie (samopremiestnenie)
- treba použiť ***projekciu*** a tým docieliť, aby hmota bola stabilná
- vizuálne to docieli tvorbu vírov
- projekcia je dôležitá časť riešenia

Riešenie rovnice rýchlosti



- Súčet nestlačiteľnej zložky a gradientu(hore)
- Na získanie nestlačiteľnej zložky odčítame gradient od aktuálnych rýchlostí.

Reálne príklady využitia

Ďakujem za pozornosť