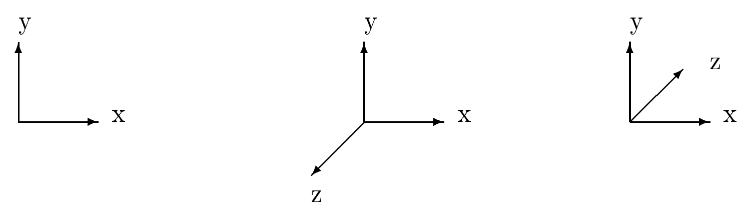
Geometrické transformácie

V počítačovej grafike (Computer Graphics – CG) sa s geometrickými transformáciami stretávame veľmi často. Pri zobrazovaní pohybu objektov, pri zmene polohy pozorovateľa alebo pri približovaní a vzďaľovaní scény, pri zobrazovaní deformácií objektov aj pri generovaní niektorých objektov popísaných pomocou nejakej transformácie je nutné používať posunutia, rotácie, škálovania ale aj zložitejšie, prípadne zložené geometrické transformácie. Centrom nášho záujmu je 2D grafika, no kvôli úplnosti nevynecháme ani zobrazenie v trojrozmernom priestore a základné spôsoby premietania trojrozmerného priestoru do roviny.

Pri popise objektov a transformácií je nutné používať súradnicový systém (s.s). Uveďme pojmy používané v CG v súvislosti so s.s v rovine a priestore.

Reálny, objektový priestor: fyzikálny trojrozmerný priestor, prípadne dvojrozmerné roviny v ňom.

Modelový priestor: 2D rovina, 3D priestor, v ktorom je daný s.s. Slúži na popis objektov, ktoré majú byť zobrazené a určenie ich polohy. Štandardne sa používajú takto orientované s.s:



Ak nebude uvedené inak, budeme používať pravotočivý 3D s.s. (pomôcka na rozlíšenie: pravotočivý s.s si môžeme namodelovať prstami pravej ruky (palec pre kladnú polos x, ukazovák y, prostredník z), ľavotočivý s.s prstami ľavej ruky. Opačne je to bolestivé ;-)

Obrazový priestor: 2D priestor, zodpovedajúci zobrazovaciemu zariadeniu (napr. obrazovke monitora). Do tohoto priestoru sa obejkty zobrazujú z 3D modelového priestoru pomocou projekcie a z 2D modelového priestoru pomocou transformácie okno – pohľad.

Transformácii objektu zodpovedá transformácia jednotlivých bodov objektu, preto sa budeme zaoberať transformáciami bodu v 2D resp. 3D priestore.

Súradnice bodov budeme používať afinné: (x, y), resp. (x, y, z) a homogénne $(x, y, 1)$, resp. $(x, y, z, 1)$. Dôvod na používanie homogénnych súradníc je ten, že v 2D je možné maticou 2x2 reprezentovať lineárne transformácie a maticou 3x3 aj všeobecnejšie afinné transformácie (lineárne + posunutie).

Základné 2D transformácie

Posunutie o vektor (t_x, t_y)

Zobrazeniu $x' = x+t_x, y' = y+t_y$ zodpovedá $(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$

Zmena mierky o faktory s_x, s_y (s pevným bodom v začiatku s.s)

$x' = x.s_x, y' = y.s_y$ zodpovedá $(x, y, 1) \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$

Otočenie o uhol ϕ okolo začiatku s.s

Otočením v kladnom smere (kladné hodnoty uhla ϕ) sa rozumie otočenie proti smeru chodu hodinových ručičiek.

Nech bod (x, y) má polárne súradnice r, α, teda $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$. Pre otočený bod (x', y') potom platí

$$x' = r\cos(\phi+\alpha) = r(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi) = x\cos\phi - y\sin\phi$$

$$y' = r\sin(\phi+\alpha) = r(\cos\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi) = x\sin\phi + y\cos\phi$$

Maticovo: $(x, y, 1) \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$

Osové súmernosti podľa súradnicových osí

$(x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$

$(x, y, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)$

Skladaniu transformácií zodpovedá násobenie matíc. Pozor! Násobenie matíc (prirodzene, rovnako ako skladanie transformácií) nie je komutatívne.

Inverznej transformácii zodpovedá inverzná matica.

Základné 3D transformácie

Matica posunutia o vektor (t_x, t_y, t_z)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

Matica škálovania s faktormi s_x, s_y, s_z (s pevným bodom v začiatku s.s.)

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočenie o uhol ϕ okolo súradnicových osí.

Na rozdiel o 2D prípadu, nie je celkom intuitívne jasné čo znamená otočenie o kladný uhol a čo otočenie o záporný uhol.

Otočením v kladnom smere (kladné hodnoty uhla ϕ) sa rozumie také otočenie, že pri otočení o uhol 90° sa kladná poloos x zobrazí na kladnú polos y, kladná polos y sa zobrazí na kladnú polos z, kladná polos z sa zobrazí na kladnú polos x.

Matica otočenia okolo osi z

(Návod: riadky lineárnej časti matice (ľavá horná podmatica 3x3) sú obrazy jednotlivých jednotkových vektorov)

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica otočenia okolo osi y

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica otočenia okolo osi x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočenie o uhol ϕ okolo priamky prechádzajúcej začiatkom s.s, danej smerovým vektorom $\vec{d}$

Toto zobrazenie zložíme z piatich rotácií, aby sme mohli využiť to, že poznáme matice otočení okolo jednotlivých súradných osí. Spôsob, ktorý uvedieme, samozrejme nie je jediný možný. Výsledná matica však musí byť nakoniec rovnaká.

Päť otočení:

(1) také otočenie okolo osi y, aby $\vec{d}'$ obraz vektora $\vec{d}$ ležal v rovine yz
(2) také otočenie okolo osi x, aby $\vec{d}''$ obraz vektora $\vec{d}'$ ležal na kladnej polosi z
(3) otočenenie okolo osi z o uhol ϕ
(4) otočenie okolo osi x o uhol opačný ako v bode (2)
(5) otočenie okolo osi y o uhol opačný ako v bode (1)

Príslušné matice:

Nech $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z), d = \sqrt{d_x^2 + d_z^2}, D = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{d_z}{d} & 0 & \frac{d_x}{d} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{d_x}{d} & 0 & \frac{d_z}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{D} & \frac{d_y}{D} & 0 \\ 0 & -\frac{d_y}{D} & \frac{d}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_4 = R_2^{-1}$
$R_5 = R_1^{-1}$
Výsledná matica $R = R_1.R_2.R_3.R_4.R_5$.

Transformácia okno – pohľad

Táto transformácia sa používa na zobrazenie obdĺžnika – okna – window (najčastejšie v modelovom priestore) na obdĺžnik – pohľad – view (v obrazovom priestore).

Nech okno je dané ľavým dolným vrcholom $A^w = (A_x^w, A_y^w)$ a pravým horným vrcholom $B^w = (B_x^w, B_y^w)$. Pohľad anologicky $A^v = (A_x^v, A_y^v)$, $B^v = (B_x^v, B_y^v)$.

Želanú transformáciu môžeme zložiť z posunutia, škálovania a ďalšieho posunutia $T = T_1.S.T_2$.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -A_x^w & -A_y^w & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{B_x^v - A_x^v}{B_x^w - A_x^w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_y^v - A_y^v}{B_y^w - A_y^w} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A_x^v & A_y^v & 1 \end{pmatrix}$$

Projekcie – premietania

Venujme sa teraz základným spôsobom zobrazenia bodu z 3D priestoru na jeho priemet v 2D priestore. Tento priemet dosiahneme ako prienik vybranej roviny – priemetne a premietacieho lúča, ktorý prechádza daným bodom. Podľa toho, či je smer premietacieho lúča určený smerovým vektorom, alebo pevným bodom, hovoríme rovnobežnom, alebo o stredovom premietaní. Rovnobežné premietania rozdeľme ďalej na kolmé (ak je smer premietania kolmý na priemetňu) a šikmé.

Rovnobežné prebietanie

Najprv nech priemetňa je rovina xy.
Kolmé premietanie možno maticovo vyjadriť takto:

$$(x, y, z, 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y', 0, 1)$$

Šikmé premietanie, ktoré bod $P = (0, 0, 1)$ zobrazí do bodu $(l\cos\phi, l\sin\phi)$ má takéto maticové vyjadrenie:

$$(x,y,z,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\phi & l\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x',y',0,1)$$

(Že je toto vyjadrenie správne, možno nahliadnuť pomocou podobných trojuholníkov. Ak $l = 1$ premietaniu sa hovorí vojenské, ak $l = \frac{1}{2}$ premietanie sa nazýva kabinetné.)

Urobme teraz všeobecné vyjadrenie. Nech priemetňa je daná v 3D referenčným bodom R a vektormi $\vec{u}, \vec{v}$. Smer premietania nech je daný vektorom $\vec{d}$. Bod $P = (x,y,z)$ chceme zobraziť na bod P' so súradnicami x', y' v s.s. danom $R, \vec{u}, \vec{v}$.

$$P' = R + x'\vec{u} + y'\vec{v} = P + k.\vec{d}$$
$$P - R = x'\vec{u} + y'\vec{v} - k.\vec{d}$$

Ak obe strany rovnice (sú to vektory) skalárne vynásobíme vektorovým súčinom $(\vec{v} \times \vec{d})$, dostaneme

$$(P-R)(\vec{v} \times \vec{d}) = x'\vec{u}(\vec{v} \times \vec{d})$$
$$x' = \frac{(P-R)(\vec{v} \times \vec{d})}{\vec{u}(\vec{v} \times \vec{d})} = \frac{(P-R)(\vec{v} \times \vec{d})}{\vec{d}(\vec{u} \times \vec{v})}$$

Analogicky

$$y' = \frac{(P-R)(\vec{u} \times \vec{d})}{\vec{v}(\vec{u} \times \vec{d})} = \frac{(P-R)(\vec{u} \times \vec{d})}{\vec{d}(\vec{u} \times \vec{v})}$$

Stredové premietanie

Najprv nech priemetňa je rovina rovnobežná s rovinou xy, vo vzdialenosti d od nej. Stred premietania nech je bod $(0,0,0)$.

Pri použití homogénnych súradníc môžeme zobrazenie $x' = \frac{d}{z}x, y' = \frac{d}{z}y, z' = d$,zapísať maticovo

$$(x,y,z,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x,y,z,\frac{z}{d}) = (\frac{d}{z}x, \frac{d}{z}y, d, 1)$$

Nech teraz je priemetňa rovina xy, stred (0,0,-d).

Pri použití homogénnych súradníc môžeme zobrazenie $x' = \frac{d}{z+d}x, y' = \frac{d}{z+d}y, z' = 0$,zapísať maticovo

$$(x,y,z,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x,y,0,\frac{z}{d}+1) = (x\frac{d}{z+d}, y\frac{d}{z+d}, 0, 1)$$

Všeobecne: Nech priemetňu určujú bod R a vektory $\vec{u}, \vec{v}$. Stred premietania nech je bod S. Bod $P = (x, y, z)$ chceme zobraziť na bod P' so súradnicami x', y' v s.s. danom $R, \vec{u}, \vec{v}$.

$$P' = R + x'\vec{u} + y'\vec{v} = S + k.(S - P)$$
$$S - R = x'\vec{u} + y'\vec{v} - k.(S - P)$$

Ak obe strany rovnice (sú to vektory) skalárne vynásobíme vektorovým súčinom $(\vec{v} \times (S - P))$, dostaneme

$$(S - R)(\vec{v} \times (S - P)) = x'\vec{u}(\vec{v} \times (S - P))$$
$$x' = \frac{(S - R)(\vec{v} \times (S - P))}{\vec{u}(\vec{v} \times (S - P))} = \frac{(P - S)(\vec{v} \times (R - S))}{(P - S)(\vec{u} \times \vec{v})}$$

Analogicky

$$y' = \frac{(S - R)(\vec{u} \times (S - P))}{\vec{v}(\vec{u} \times (S - P))} = \frac{(P - S)(\vec{u} \times (R - S))}{(P - S)(\vec{u} \times \vec{v})}$$

Úlohy

(1) Odvoďte maticu pre súmernosť v rovine podľa všeobecnej priamky.
(2) Napíšte maticu otáčania v rovine okolo bodu $M(m, n)$ o uhol ϕ.
(3) Napíšte maticu škálovania v rovine s pevným bodom $P(p, q)$ a faktormi s_x, s_y.
(4) Odvoďte maticu otáčania v priestore okolo ľubovoľnej osi.

Ďalšia literatúra

(1) Ružický E.: Úvod do počítačovej grafiky, MFF UK Bratislava, 1991
(2) Ružický E.: Ferko A.: Počítačová grafika a spracovanie obrazu, Sapientia, 1995
(3) Skala V.: Algoritmy počítačové grafiky I, II, III, VŠSE Plzeň, 1992