Cvičenia na prvorádovú logiku

V niektorých úlohách sa pracuje s prvorádovým jazykom rozšíreným o binárny logický predikát rovnosti „=“. Formuly tvaru $t_1 = t_2$, kde t_1, t_2 sú termy, sú atómy. Sémantika rovnosti je nasledovná: štrukúra $\mathcal{D} = (D, I)$ spĺňa atóm $t_1 = t_2$, ak termy t_1, t_2 označujú ten istý objekt z domény. Symbolicky:

$$\mathcal{D} \models t_1 = t_2 \text{ iff } t_1^I = t_2^I$$

1 Syntax

Nasledovnú signatúru σ_s použijeme na popis vzťahov študentov v škole, v ktorej máme:

- tri predikátové symboly: byť mužom, kamarátiť sa, byť starší ako;
- štyri funkčné symboly: konkrétny študent $\mathsf{Ján}$, najstaršia študentka v škole $\mathsf{najŠtudentka}$ a funkcie, ktoré každému študentovi priradia najstaršieho spolužiaka F, resp. najmladšieho študenta staršieho ako on S.

Príklad 1. $\sigma_s = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, arity)$, kde:

- $\mathcal{P} = \{Muž, Kam, \succ\}$ je množina všetkých mimologických predikátových symbolov
- $\mathcal{F} = \{\mathsf{Ján}, \mathsf{najŠtudentka}, \mathsf{F}, \mathsf{S}\}$ je množina všetkých funkčných symbolov
- $arity = \{(Muž, 2), (Kam, 2), (\succ, 2), (\mathsf{Ján}, 0), (\mathsf{najŠtudentka}, 0), (\mathsf{F}, 1), (\mathsf{S}, 1)\}$ je funkcia árnosti

Úloha 1. Uvažujme prvorádový jazyk s rovnosťou (binárny predikátový symbol $=$) a signatúrou σ_s. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich slov sú dobre vytvorené *termy* a *formuly*. Ktoré z nich sú uzemnené? Riaďte sa striktne podľa definícii z prednášky [1].

a) $(\exists y)\mathsf{Ján} = \mathsf{Ján}$ b) $\mathsf{S}(x)$ c) $\mathsf{F}(\mathsf{Ján})$ d) $\mathsf{F}(\mathsf{S}(\mathsf{F}(\mathsf{najŠtudentka})))$ e) $(\forall x)\mathsf{S}(x)$ f) $\mathsf{Ján} \prec \mathsf{Ján}$
g) $\mathsf{S}(x, y)$ h) $\neg Muž(\mathsf{najŠtudentka}) \land Kam(\mathsf{Ján}, \mathsf{Ján})$ i) $\mathsf{Ján} \succ Muž(\mathsf{Ján})$ j) $x \leftrightarrow \mathsf{Ján}$

Úloha 2. Majme binárny predikátový symbol p. Určte výskyt (*viazaný* alebo *voľný*) premenných v nasledujúcich formulách. Ktoré formuly sú *uzavreté*?

a) $(\exists x)(p(x, x) \lor p(x, z))$ b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, y) \land p(y, z)) \to p(x, z))$ c) $(\forall x)p(y, y)$
d) $((\exists x)p(x, x) \to p(x, x))$ e) $(\exists x)(p(x, x) \to p(x, x))$ f) $((\exists x)p(x, x) \to (\forall y)p(y, x))$

Ďalej, ak nedôjde k zmene významu, budeme niektoré zátvorky vynechávať. Napr. $p \lor q$ miesto $(p \lor q)$ alebo $p \land q \land r$ miesto $(p \land q) \land r$. Podobne miesto $\neg(\mathsf{Ján} = \mathsf{najŠtudentka})$ budeme písať $\mathsf{Ján} \neq \mathsf{najŠtudentka}$.

2 Sémantika

V celom texte používame slovo „študent“ nerodovo a slová „študent-muž“, „študentka-žena“ rodovo. Podobne aj slovo „spolužiak“.

Príklad 2. Pre signatúru σ_s môžeme napríklad uvažovať nasledovnú schému štruktúr:

- univerzum (doména) je neprázdna množina študentov
- $Muž(x)$ interpretujme ako „x je mužom“
- $Kam(x, y)$ interpretujme ako „x je kamarátom y“
- $x \succ y$ interpretujme ako „x je starší než y“

[1] Hint: Striktne vzaté podľa definície z prednášky, slovo $Muž(x) \land Muž(x)$ nie je formula. Prečo?

- Ján interpretujme ako konkrétneho študenta-muža Jana
- najŠtudentka interpretujme ako najstaršiu študentku-ženu v škole
- F interpretujme ako funkciu, ktorá každému študentovi priradí najstaršieho študenta v jeho triede
- S interpretujme ako funkciu, ktorá každému študentovi x priradí toho študenta, ktorý je najmladší zo študentov starších ako x. Táto funkcia je definovaná pre každého študenta v škole, okrem najstaršieho. Tomu nech S priradí jeho samotného.

V príklade 2 sme si popísali *zamýšľané* štruktúry pre školu. Uvedomme si však, že vo všeobecnosti nám nič nebráni uvažovať akúkoľvek inú neprázdnu doménu, interpretovať predikátový symbol $Muž$ ako „byť ženou", či funkčnú konštantu najŠtudentka ako nejaké prvočíslo (v prípade, že nejaké doména obsahuje). Na to treba myslieť pri rozhodovaní vyplývania formuly z teórie, kedy je potrebné overiť *všetky* modely teórie, nie len pôvodne zamýšľané.

Úloha 3. Definujme si teraz konkrétnu štruktúru $\mathcal{D} = (D, I)$ nad signatúrou σ_s:

- $D = \{1, \ldots, 10\}$
- $Muž^I = \{5, \ldots, 10\}$
- $Kam^I = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 5\}, i \neq j\}$
- $\succ^I = \{(i, j) \mid i > j\}$
- $\mathsf{F}^I(x) = 10$
- $\mathsf{S}^I(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pre } x < 10 \\ 10 & \text{pre } x = 10 \end{cases}$

Doplňte I o interpretáciu funkčných konštánt tak, aby štruktúra $\mathcal{D}$ spĺňala formulu (v prípade, že to nie je možné, uveďte dôvod)

a) $\mathsf{najŠtudentka} \succ \mathsf{Ján}$ b) $\mathsf{najŠtudentka} \succ \mathsf{Ján} \ \wedge \neg Muž(\mathsf{najŠtudentka}) \wedge Muž(\mathsf{Ján})$
c) $(\forall x)(\mathsf{najŠtudentka} \succ x \to Kam(x, \mathsf{najŠtudentka}))$ d) $(\forall x)(Kam(x, \mathsf{najŠtudentka}) \to Kam(x, \mathsf{Ján}))$
e) $(\forall x)(Kam(x, \mathsf{Ján}) \to Kam(x, \mathsf{najŠtudentka})) \wedge Muž(\mathsf{Ján}) \wedge \neg Muž(\mathsf{najŠtudentka})$
f) $\mathsf{F}(\mathsf{Ján}) = \mathsf{najŠtudentka}$ g) $\mathsf{S}(\mathsf{najŠtudentka}) = \mathsf{Ján} \wedge Muž(\mathsf{Ján}) \wedge \neg Muž(\mathsf{najŠtudentka})$

Úloha 4. Ak je to možné, nájdite model teórie T (stačí ak interpretujete len symboly vyskytujúce sa v T), podľa zadania:

$$T = \{(\exists x)(\exists y) x \succ y, \neg Muž(\mathsf{najŠtudentka}), (\forall x)(x \succ \mathsf{najŠtudentka} \to Muž(x))\}$$

a) doména je jednoprvková

b) doména je viacprvková

Úloha 5. Majme štruktúru $\mathcal{D} = (D, I)$ z úlohy 3, kde navyše

$$\mathsf{Ján}^I = 5 \text{ a } \mathsf{najŠtudentka}^I = 4$$

Rozhodnite či $\mathcal{D}$ je modelom formuly:

a) $(\forall x)(\forall y)(Kam(x, y) \to Kam(y, x))$

b) $\mathsf{S}(\mathsf{najŠtudentka}) = \mathsf{Ján}$

c) $(\exists x) Kam(x, x)$

d) $(\forall x)(\neg Muž(x) \to Kam(\mathsf{Ján}, x))$

e) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Kam(x,y) \land Kam(y,z)) \to Kam(x,z))$

f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Kam(x,y) \land Kam(y,z)) \to (Kam(x,z) \lor x \neq z))$

g) $(\exists x)(Kam(\mathsf{naj\check{S}tudentka}, x) \land Mu\check{z}(x)) \to Kam(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{naj\check{S}tudentka})), \mathsf{J\acute{a}n})$

h) $(\forall x)((\neg Mu\check{z}(x) \to Kam(\mathsf{naj\check{S}tudentka}, x)) \to \mathsf{J\acute{a}n} = \mathsf{naj\check{S}tudentka})$

i) $(\forall x)(\neg Mu\check{z}(x) \to Kam(\mathsf{naj\check{S}tudentka}, x)) \to \mathsf{J\acute{a}n} = \mathsf{naj\check{S}tudentka}$

Úloha 6. Rozhodnite či z teórie vyplýva daná uzavretá formula:

a) $\{(\forall x)\mathsf{F}(x) \neq \mathsf{J\acute{a}n}\} \models (\exists x) x \neq \mathsf{J\acute{a}n}$

b) $\{(\forall x)\mathsf{F}(x) \neq \mathsf{J\acute{a}n}\} \models \mathsf{F}(\mathsf{F}(\mathsf{J\acute{a}n})) = \mathsf{J\acute{a}n}$

c) $\{(\forall x)\mathsf{F}(x) \neq \mathsf{J\acute{a}n}\} \models \mathsf{F}(\mathsf{F}(\mathsf{F}(\mathsf{naj\check{S}tudentka}))) \neq \mathsf{J\acute{a}n}$

d) $\{(\forall x)(x = \mathsf{J\acute{a}n} \lor x = \mathsf{naj\check{S}tudentka})\} \models \mathsf{J\acute{a}n} \succ \mathsf{naj\check{S}tudentka} \lor \mathsf{naj\check{S}tudentka} \succ \mathsf{J\acute{a}n}$

e) $\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \succ y \land y \succ z) \to x \succ z), (\exists x)(\exists y) x \succ y\} \models (\exists x)(\forall y)(y \neq x \to y \succ x)$

Úloha 7. Majme ľubovoľnú teóriu T, uzavretú formulu ϕ. $T \models \phi$ práve vtedy keď teória $T \cup \{\neg\phi\}$ je nesplniteľná. Dokážte!

3 Formalizácia

Úloha 8. Majme signatúru σ_s z príkladu 1 a uvažujme iba štruktúry popísané v príklade 2.

Vyjadrite v prvorádovom jazyku s rovnosťou a signatúrou σ_s formulu s významom „najstarší študent celej školy je žena“ a to rôznymi spôsobmi podľa zadania:

a) môžete použiť všetky symboly z σ_s, avšak formula musí byť *uzemnená (grounded)* .

b) *nemôžete* použiť funkčné konštanty a kvantifikovať smiete najviac raz.

c) *nemôžete* použiť žiadne funkčné symboly.

Ďalej formalizujte nasledovné vety:

d) „Ján je najstarší vo svojej triede“

e) „Najstarší Janov spolužiak je žena“

f) „Najstarší Janov spolužiak je najstarším študentom v celej škole“

g) „Najstaršia študentka v škole nie je mladšia ako najstarší Janov spolužiak“

h) „Najstaršia študentka v škole nie je mladšia ako najstarší študent v škole“

Úloha 9. Uvažujme jazyk s rovnosťou, signatúru σ_s a štruktúry z príkladu 2. Slovami vyjadrite nasledovné formuly:

a) $(\forall x)(\forall y)(x \succ y \lor x = y \lor y \succ x)$ b) $(\forall x)(\exists y)Kam(x,y)$ c) $(\exists x)(\forall y)Kam(x,y)$
d) $\mathsf{S}(\mathsf{J\acute{a}n}) \neq \mathsf{J\acute{a}n}$ e) $\neg Mu\check{z}(\mathsf{naj\check{S}tudentka})$ f) $(\exists x)(\neg Mu\check{z}(x) \land Kam(\mathsf{F}(\mathsf{J\acute{a}n}), x) \land x \succ \mathsf{F}(\mathsf{J\acute{a}n}))$

Úloha 10. Navrhnite vhodnú signatúru a formalizujte nasledovné vety. V prípade nejednoznačnosti uveďte viac formalizácii.

a) „Každé auto má svojho majiteľa“

b) „Nie je také jedlo, ktoré by každému chutilo“

c) „Každý ma niekoho rád alebo niekoho nenávidí“

d) „Niekto dal Júlii kyticu“

e) „Niekto dal Júlii niečo“

f) „Niekto dal niekomu kyticu“

g) „Niekto dal niekomu niečo“

h) „Rómeo dal Júlii niečo“

i) „Rómeo dal niekomu kyticu“

j) „Rómeo dal Júlii kyticu“

k) „Niekto nedal Júlii kyticu“

l) „Niekto dal každému niečo“

m) „Každý dal každému niečo“

n) „Každý dal každému všetko“

o) „Nikto nedal nikomu nič“