

# Simulácia časticovej hydrodynamiky v zložitých útvároch s využitím vyhladzovacej funkcie

Martin Horanský, 1-mAlu

# Úvod

- Zobrazenie pohybu kvapalín:
  - **Eulerova metóda**
    - fyzikálne hodnoty v mriežke
  - **Lagrangeova metóda**
    - nespojené častice, ktoré obsahujú fyzikálne hodnoty -> časticové metódy
      - **Poloimplicitná metóda pohybujúcich sa častíc (MPS)**
      - **Simulácia časticovej hydrodynamiky s využitím vyhladzovacej funkcie (SPH)**

# MPS vs SPH

Poloimplicitná metóda pohybujúcich sa častíc  
(MPS)

- využitie v strojníckom obore
- rieši nezhustený tok

Simulácia časticovej hydrodynamiky s využitím  
vyhladzovacej funkcie (SPH)

- využitie v počítačovej grafike
- nižšia cena výpočtu ako MPS

# Metóda výpočtu hranice steny

- rieši problém časticových metód – geometria hraníc nie je reprezentovaná správne /hraničné steny aj kvapalina -> častice/
  - nepoužíva stenové častice, ale funkciu vzdialenosti počítanú z polygónového modelu – celkový menší počet častíc
- ľahká simulácia pohybu kvapaliny v zložitých útvaroch

# Potrebné rovnice - SPH

## Riadiace rovnice

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{U} + \mathbf{g} \quad (2)$$

(1) - rovnica hmotnosti

(2) – rovnica hybnosti

$\rho$  - hustota

$U$  - rýchlosť

$P$  - tlak

$\nu$  – dynamický koeficient viskozity

$g$  – gravitačné zrýchlenie

## Diskretizácia

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ &= \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (4)$$

$\Phi$  – (3) fyzikálna hodnota – interpolovaná váhovaná suma fyzikálnych hodnôt  $\phi_j$  susedných častíc  $j$

$m_j$  – hmotnosť

$\rho_j$  - hustota

$x_j$  – pozícia častice  $j$

$W$  – vážená funkcia

$\rho(\mathbf{x})$  – (4) hustota kvapaliny na konkrétnej pozícii  $x$

# Potrebné rovnice - SPH (2)

## Diskretizácia

$$p = p_0 + k(\rho - \rho_0) \quad (5)$$

(5) - rovnica plynu  
 $p$  – tlak kvapaliny  
 $\rho_0$  – zvyškový tlak

$$\mathbf{F}_i^{press} = - \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W_{press}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_i^{vis} = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla W_{vis}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (7)$$

(6) – sila tlaku na časticu  $i$   
(7) – sila viskozity na časticu  $i$   
 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$   
 $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  – smerové vektory častíc  $i, j$

$$\nabla W_{press}(\mathbf{r}) = \frac{45}{\pi d^6} (d - |\mathbf{r}|)^3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (8)$$

$$\nabla W_{vis}(\mathbf{r}) = \frac{45}{\pi d^6} (d - |\mathbf{r}|) \quad (9)$$

$$W(\mathbf{r}) = \frac{315}{64\pi d^9} (d^2 - |\mathbf{r}|^2)^3. \quad (10)$$

(8) – váhovaná funkcia pre tlak  
(9) – váhovaná funkcia pre viskozitu  
(10) – váhovaná funkcia pre ostatné veličiny

Hodnota týchto váhovaných funkcií mimo efektívneho polomeru  $d$  častice je 0

# Rovnice - Váňované funkcie steny

## Hustota

$$\begin{aligned}\rho_i(\mathbf{r}_i) &= \sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij}) \\ &= \sum_{j \in \text{fluid}} m_j W(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_{j \in \text{wall}} m_j W(\mathbf{r}_{ij})\end{aligned}\quad (11)$$

$$\rho_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \in \text{fluid}} m_j W(\mathbf{r}_{ij}) + Z_{\text{wall}}^{\text{rho}}(|\mathbf{r}_{iw}|). \quad (12)$$

(11) – prvý člen na pravej strane je príspevok častíc kvapaliny a druhý častíc steny

$|\mathbf{r}_{iw}|$  - vzdialenosť častice  $i$  k stene

$|\mathbf{r}_{iw}|$ ,  $|\mathbf{r}_{ij}|$  - použité vo výpočte váňovanej funkcie  $W$  a príspevku častíc steny

(12)  $-Z_{\text{wall}}^{\text{rho}}$  = váňovaná funkcia hustoty

## Viskozita

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i^{\text{vis}} &= \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla W_{\text{vis}}(\mathbf{r}_{ij}) \\ &= \mathbf{F}_{i,\text{fluid}}^{\text{vis}} + \mathbf{F}_{i,\text{wall}}^{\text{vis}}.\end{aligned}\quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{i,\text{wall}}^{\text{vis}} = -\mu \mathbf{v}_i \sum_{j \in \text{wall}} m_j \frac{1}{\rho_j} \nabla W_{\text{vis}}(\mathbf{r}_{ij}). \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_i^{\text{vis}} = -\mu \mathbf{v}_i Z_{\text{wall}}^{\text{vis}}(|\mathbf{r}_{iw}|) \quad (15)$$

(14) – sila viskozity steny

(15) –  $Z_{\text{wall}}^{\text{vis}}$  - váňovaná funkcia viskozity

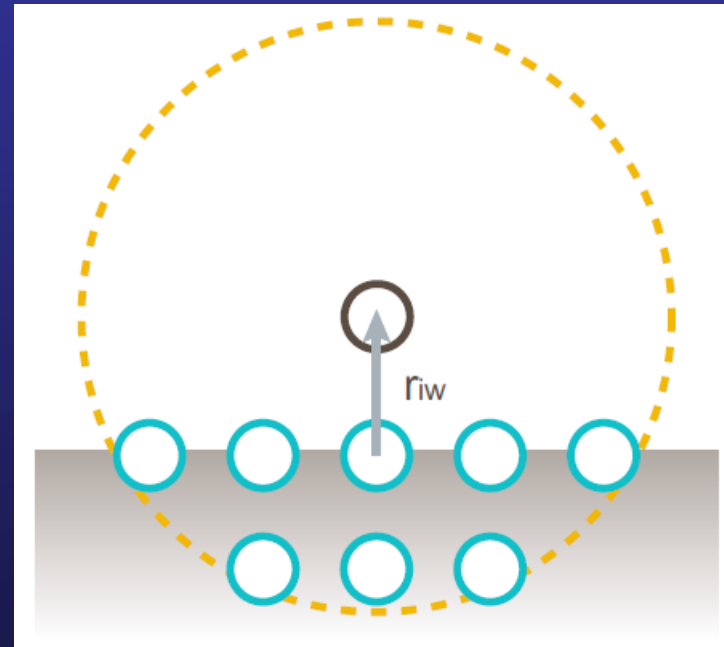
# Rovnice - Váňované funkcie steny (2)

## Tlak

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{press} &= m_i \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{\Delta t^2} \\ &= -m_i \frac{(d - |\mathbf{r}_{iw}|) \mathbf{n}(\mathbf{r}_i)}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (16)$$

funkcia vzdialenosti,  
normálový vektor

- nemenia sa, ak sa nemení hranica steny
- môžu byť predpočítané



Obr.1: Distribúcia častíc steny v efektívnom polomere



# Rendering

- Častice reprezentujúce kvapalinu -> kvapalný povrch
- Implicitná funkcia -> implicitný povrch
- Výsledný povrch – dotýkajúci sa steny aj voľný
  - blobby (NEhladký)
- Povrch dotýkajúci sa hranice steny by mal mapovať tvar steny

# Extrakcia povrchu

$$\phi_i(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) \quad (17)$$

(17) – hustota častice  $i$   
v pozícií  $x$   
 $f$  - funkcia distribúcie  
hustoty – definovaná  
pre každú časticu

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_j \phi_j(\mathbf{x}). \quad (18)$$

(18) – implicitná  
funkcia kvapaliny –  
suma hustoty  
jednotlivých častíc

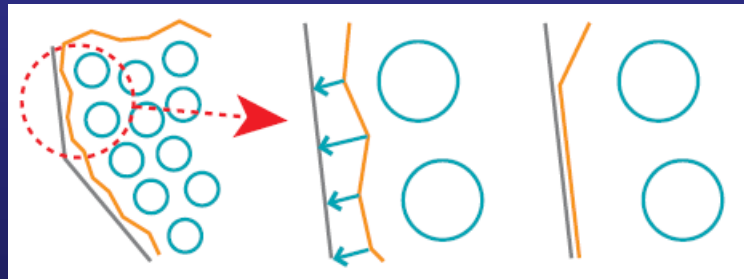
Po aplikovaní (17), (18) sa extrahujú polygóny  
povrchu pri  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$  použitím Marching Cubes.

# Namapovanie povrchu

Extrahovaný povrch nie je namapovaný na hranicu steny  
Riešenie: pozícia vrchola sa napraví presunutím do  
najbližšieho bodu steny

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - d(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

Vrchol na pozícií  $\mathbf{x}$  sa presunie na správnu pozíciu  $\mathbf{x}'$  použitím funkcie vzdialenosti  $d(\mathbf{x})$  a normálového vektoru  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$



Obr.2: Procedúry namapovania povrchu

# Výsledky

- Obr.3 – gargoyle – napriek tenkým krídlam kvapalina hladko tečie do týchto častí
- Obr.4, 5 – drak – postupný tok kvapaliny
- Obr. 6 – Buddha – obmedzenie časticových metód – jemné štruktúry menšie ako je priemer častice

# Výsledky 2

Prehľad počtu tekutých častíc, častíc steny a výpočtového času

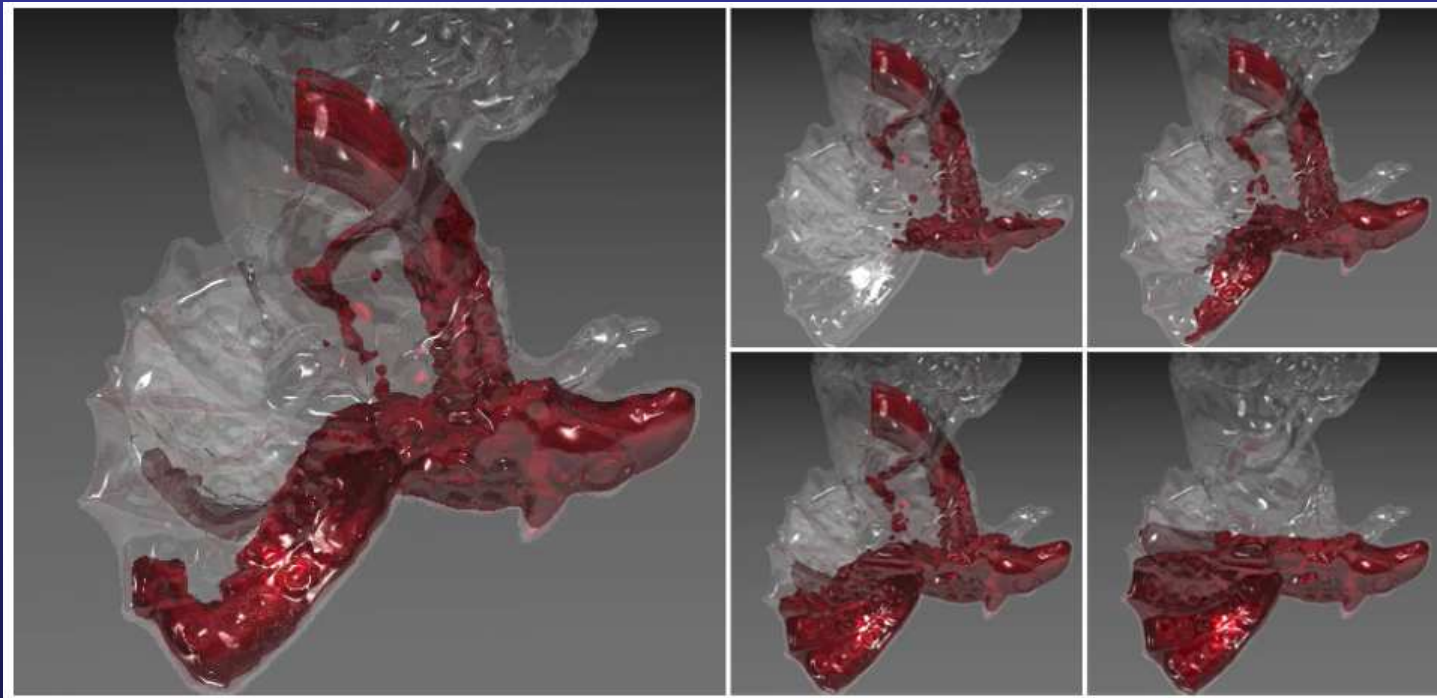
Table 1: Total number of fluid particles and computation time for one time step (in milliseconds).

Model	Fluid	Time
Gargoyle	20,000	309.4
Dragon	20,000	281.2
Buddha	20,000	296.8

Table 2: The number of wall particles (1 layer) and its ratio to the total number of particles.

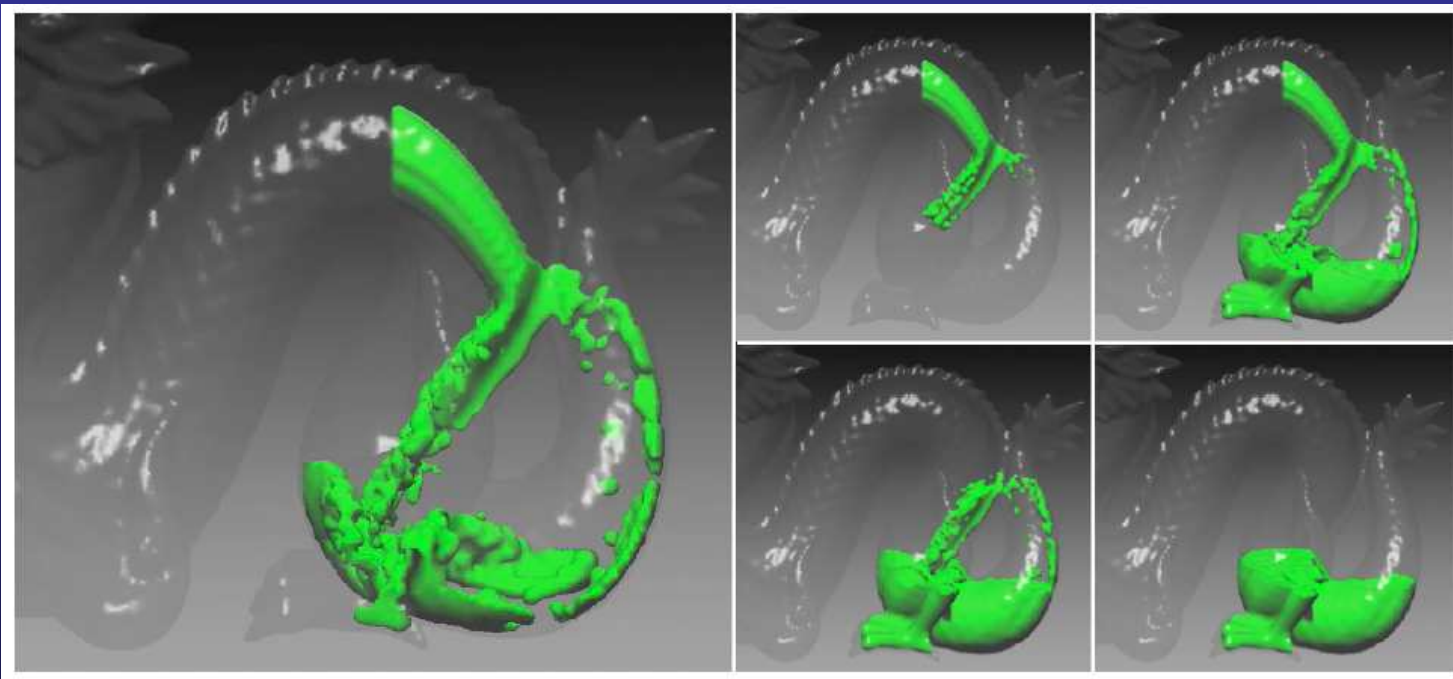
Model	Wall	Total	Ratio
Gargoyle	26,688	46,688	0.572
Dragon	18,582	38,582	0.482
Buddha	12,084	32,084	0.377

## Výsledky 3



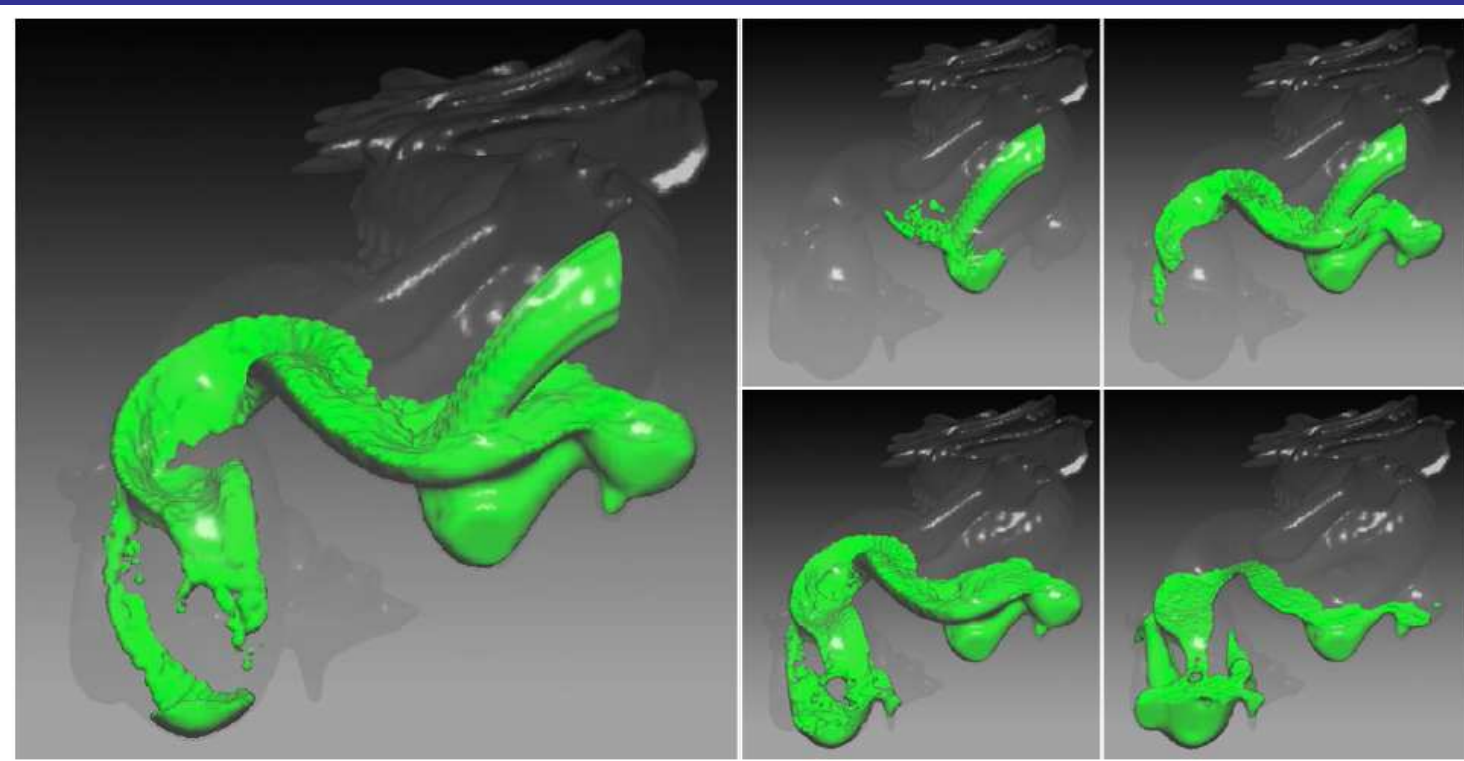
obr. 3: Výpočtový výsledok toku po voľnom povrchu. Polygónový model gargoyla bol použitý ako hraničná stena

## Výsledky 4



obr. 4: Výpočtový výsledok toku po voľnom povrchu. Polygónový model draka bol použitý ako hraničná stena.

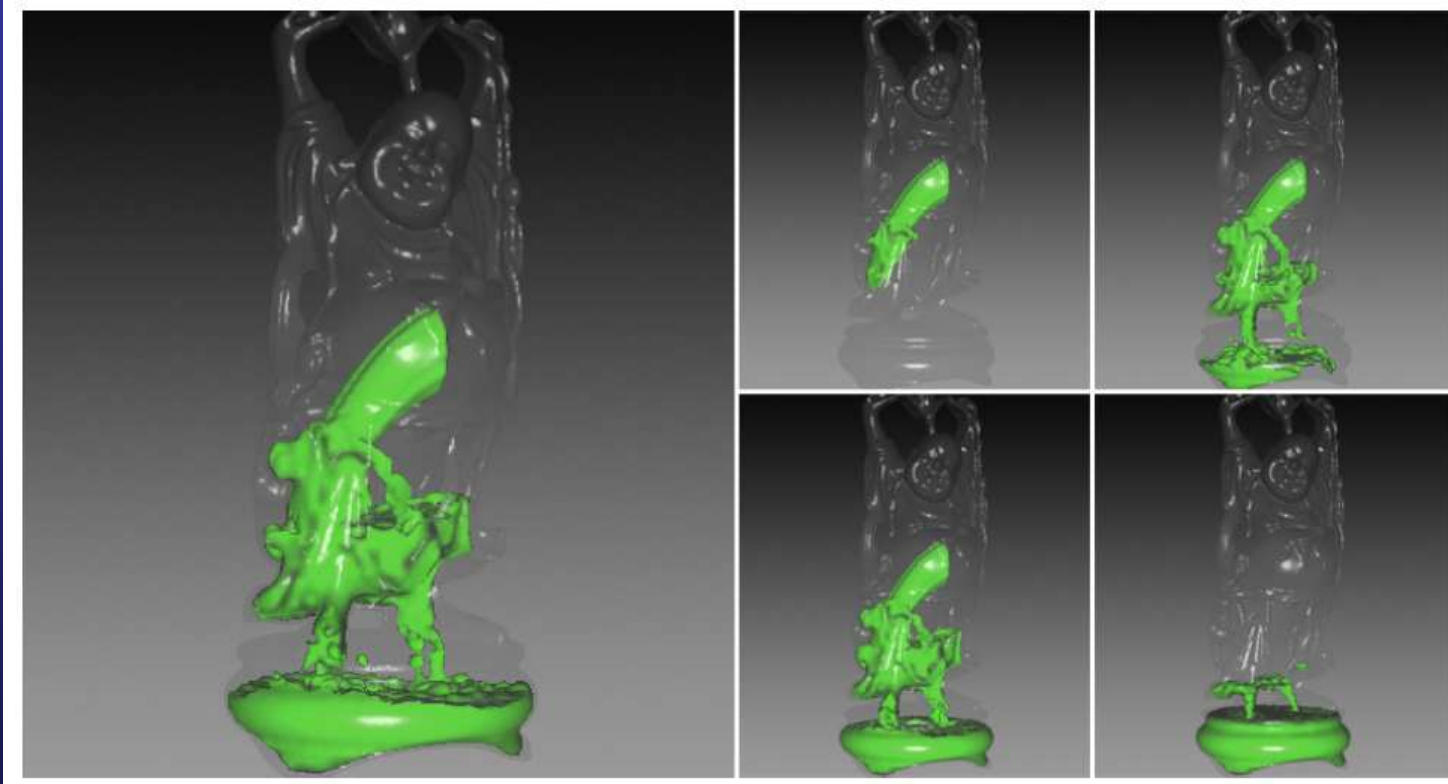
## Výsledky 5



obr. 5: Výpočtový výsledok toku po voľnom povrchu. Polygónový model draka bol použitý ako hraničná stena.



## Výsledky 6



obr.6: Výpočtový výsledok toku po voľnom povrchu. Polygónový model Buddhu bol použitý ako hraničná stena.

Ďakujem za pozornosť.

