Rozcvička č. 02 – Vzorové riešenie

Úloha 1. *Dokážte: TBoxy* $\mathcal{T}_1 = \{A \sqsubseteq C, B \sqsubseteq C\}$ *a* $\mathcal{T}_2 = \{A \sqcup B \sqsubseteq C\}$ *sú ekvivalentné.*

Dôkaz sa dal spraviť rôznymi spôsobmi. Tu je jeden z nich.

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že pre všetky interpretácie I platí: $I \models \mathcal{T}_1$ práve vtedy, keď $I \models \mathcal{T}_2$.
$\Rightarrow$ Nech I je modelom $\mathcal{T}_1$. Teda platí $A^I \subseteq C^I$ a $B^I \subseteq C^I$. Chceme dokázať $A^I \cup B^I \subseteq C^I$.
Vezmime $x \in A^I \cup B^I$. Platí $x \in A^I$ alebo $y \in B^I$. Uvažujme po prípadoch:

- Ak $x \in A^I$, potom z $A^I \subseteq C^I$ dostaneme $x \in C^I$,
- Ak $x \in B^I$, potom z $B^I \subseteq C^I$ dostaneme $x \in C^I$.

Teda $x \in C^I$.
$\Leftarrow$ Nech I je modelom $\mathcal{T}_2$. Teda platí $A^I \cup B^I \subseteq C^I$. Chceme dokázať $A^I \subseteq C^I$ a $B^I \subseteq C^I$.
Vezmime $x \in A^I$. Potom $x \in A^I \cup B^I$ a podľa predpokladu $A^I \cup B^I \subseteq C^I$ dostávame $x \in C^I$.
Vezmime $x \in B^I$. Potom $x \in A^I \cup B^I$ a podľa predpokladu $A^I \cup B^I \subseteq C^I$ dostávame $x \in C^I$. $\square$